OS CONCEITOS MATEMÁTICOS DE NÚMERO IRRACIONAL E DE RAZÃO COMPOSTA, SEGUNDO ÁLVARO TOMÁS, NO SEU *LIBER DE TRIPLICI MOTU*

THE MATHEMATICAL CONCEPTS OF IRRATIONAL NUMBER AND COMPOUNDING RATIOS, ACCORDING TO ALVARUS THOMAS IN HIS *LIBER DE TRIPLICI MOTU*

Maria Elfrida Ralha & Maria Fernanda Estrada[1]

CMAT (*Centro de Matemática*)

Universidade do Minho

eralha@math.uminho.pt & *festrada@math.uminho.pt*

Resumo

O português Álvaro Tomás foi-nos apresentado, em 1926, por Rey Pastor como um *sutil ingenio precursor de Pedro Nunes* e, na sua obra (única, tanto quanto sabemos) intitulada *Liber de Triplici Motu proportionibus annexis*... que foi publicada em Paris, em 1509, aborda a teoria do movimento e usa, com maestria reconhecida, séries numéricas.
Neste nosso estudo apresentaremos uma parte da obra *Liber de Triplici Motu* e procuraremos situá-la, na tradição medieval, quer em termos científicos, quer em termos pedagógicos.
Centraremos, todavia, a nossa atenção, em particular, no 3º capítulo da parte 1 onde Álvaro Tomás abordou a teoria das razões/proporções e nos oferece uma demonstração, no mínimo invulgar, da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Recordaremos ainda o conceito de razão composta, a partir dos *Elementos* de Euclides, em particular das definições V,9, V,10 e VI, 5 e das controvérsias por elas levantadas. Mostraremos finalmente como o 5º capítulo, da parte 2, é um exemplo curioso desta argumentação matemático-filosófica, com argumentos “pró” e “contra” a tese proposta.

Palavras-Chave: Álvaro Tomás, razão/proporção, número irracional, razão composta

Abstract

The portuguese Alvarus Thomas was intoduced by Rey Pastor, in 1926, as a *sutil ingenio precursor de Pedro Nunes* and, in his treatise *Liber de Triplici Motu proportionibus annexis*... published in Paris, in 1509, he studies the motion theory and he deals skillfully with numerical series.
In this article, we study a part of the book *Liber de Triplici Motu* related to ratios/proportions, integrating it in the medieval tradition, under scientific and pedagogical terms.
We will focus, however, our attention, in particular, in Chapter 3 of Part 1, where Álvarus Thomas gives us a very curious proof and at least unusual of the irrationality of $\sqrt{2}$. We will also remember the concept of compounding ratios from the *Euclid’s Elements,* in particular, the definitions V, 9; V, 10 and VI, 5 and the controversies raised by them. Finally, we will show how the Chapter 5, Part 2 , is a curious example of the mathematical-philosophical argumentation with arguments "pro" and "against" the proposed thesis.

Key-words: Alvarus Thomas, ratio/proportion, irrational number, compounding ratios.

[1] As autoras foram parcialmente financiadas pelo CMAT - Centro de Matemática da Universidade do Minho, através de fundos do FEDER pelo Programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE e pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto Est-C/MAT/UI0013/2011.

1. INTRODUÇÃO

Em 1914, H. Wieleitner relatava[2] a importância da obra do escolástico português, ÁLVARO TOMÁS impressa em Paris, em 1509 com o título de *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Alvari Thomae Ulixbonensis philosophicas Suiseth calculationes ex parte declarans*. Declarou, nessa altura, Wieleitner que, em particular, estaríamos "perante uma exposição sistemática da utilização das séries infinitas" o que, por si só e dada a raridade do tratamento do assunto na Idade Média, justificaria "ser divulgado a um público alargado".

Desde então foram já muitos os estudiosos que, nacional e internacionalmente, se debruçaram sobre este tratado sem que, apesar disso, se encontre já integralmente traduzido para português.

2. ASPECTOS BIOGRÁFICOS

Uma informação biográfica concisa encontra-se aposta na própria obra onde, no colofão, podemos ficar a saber que Álvaro Tomás, o seu autor, nasceu em Lisboa e que, no início do século XVI (1509, mais precisamente) ensinava no Colégio (universitário) Coqueret, em Paris[3].

3. ASPECTOS BIBLIOGRÁFICOS

Podemos seguramente reportar que, contrariamente ao que Wieleitner registou há cem anos atrás, o *Liber de triplici motu* não parece, na verdade, ser uma obra muito rara já que estarão, hoje em dia, identificadas mais de 30 exemplares da obra, espalhados pelo mundo ocidental mas, sobretudo, na Europa o que, por si só, nos permite julgar da importância que, mesmo à época em que foi impressa, já se lhe atribuiu.

O exemplar por nós estudado é o da Biblioteca Nacional[4] que Carlos Vilar tem, diligentemente, traduzido e cujo texto anotado, esperamos, possa, brevemente, ser publicado afim de que um público cada vez mais amplo o possa conhecer e estudar: trata-se de uma obra, escrita em latim, constituída por 139 fólios impressos a duas colunas em caracteres góticos e sem espaços entra as linhas com páginas manualmente numeradas de 1 a 278.

A complexidade da leitura, e consequentemente da tradução deste texto, aumenta porquanto, para além do latim medieval em que se encontra escrito, contem inúmeras abreviaturas cuja decifração raramente é óbvia. Dedicada, por Álvaro Tomás, a D. Pedro de Menezes apresenta, logo na 2ª página, dois poemas laudatórios.

O *Liber de triplici motu* insere-se, como de resto também sugere o próprio título, na dita tradição calculadora, da época, do Merton College em Oxford e compõe-se de um prólogo e três partes: as duas primeiras sobre a teoria das proporções e a última sobre os três tipos de movimento ("local", "aumentação" e "alteração", na nomenclatura da época).

---

[2] O artigo original, escrito em alemão e publicado na *Biblioteca Mathematica*, III. Folge, vol.14, 1914, pp.150-168, foi traduzido por S. Gessner.

[3] Veja-se H. Leitão.

[4] Biblioteca Nacional, com cota res-1572-v (da versão digitalizada).

4. O PRESENTE ESTUDO

Neste artigo dedicamo-nos a estudar dois problemas reportados por Álvaro Tomás: no primeiro deles – tratado no 3º capítulo da parte 1 – apresentamos uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Analisaremos, com particular cuidado, a demonstração que, tanto quanto sabemos, não se encontra nas já conhecidas demonstrações da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. É, de resto, o próprio Álvaro Tomás que, sugestivamente, intitula este seu capítulo de "Capítulo Terceiro no qual se mostra e demonstra que existe a razão irracional", isto é, nas palavras do autor uma razão – à qual, hoje em dia, associamos imediatamente o conceito de número racional – também pode ser irracional.

No segundo problema selecionamos – no 5º capítulo do parte 2 – a composição de razões onde Álvaro Tomás mostra, num discurso dialético característico das disputas medievais, os erros cometidos por Basanus Politus. Mostraremos como esses erros resultam, na nossa opinião, do facto de Basanus Politus não se ter exprimido na mesma terminologia aditiva que usa A. Tomás.

4.1. COMO "SE MOSTRA E DEMONSTRA QUE EXISTE A RAZÃO IRRACIONAL"

Remonta ao século V a. C., a julgar pela descrição que Platão nos deixou em *Parménides*, um estudo desenvolvido por Zenão (de Eleia) sobre o movimento e que, ainda hoje, usamos quer como exemplo de uma argumentação, dita, de "redução ao absurdo", quer como desafio intelectual associado aos, tradicionalmente denominados, "paradoxos de Zenão". Refletir sobre o movimento estava, por conseguinte, entre as preocupações dos matemáticos/filósofos que antecederam Álvaro Tomás em mais de dois milénios e argumentar dialeticamente sobre o tema também; estava igualmente entre as preocupações dos matemáticos gregos o conceito de "infinito" associado, de múltiplas formas, a muitas destas discussões recorrentes ao longo dos tempos: e nos tempos ainda mais remotos da escola Pitagórica pressupunha-se a comensurabilidade de duas grandezas quaisquer.

Dizemos que duas grandezas são comensuráveis quando admitem uma grandeza em comum. Assim: classificar duas grandezas, a e b (necessariamente do mesmo tipo), como comensuráveis significa dizer que admitem uma medida comum, isto é, significa a existência de uma terceira grandeza, u (ainda do mesmo tipo de a e de b) e de dois números naturais m e n de tal forma que $a = m \times u$ e $b = n \times u$. A descoberta de grandezas "incomensuráveis" atribui-se aos próprios geómetras Pitagóricos na procura de uma medida comum para o lado e a diagonal, em um quadrado.

Apresentamos, de seguida, a abordagem feita por Álvaro Tomás para este mesmo problema: o de estudar a razão que existe entre os dois segmentos de reta em questão no quadrado. Relevemos, desde já, que, apesar da terminologia medieval, do cariz pedagógico, e do forte pendor lógico de difícil seguimento, uma resolução muito interessante, de natureza aritmética e, tanto quanto conhecemos, atípica para o problema.

4.1.1 "Começam as razões"

É no capítulo 1, da parte I, que Álvaro Tomás trata *De proportione et eius divisione*, isto é, "da razão e das suas divisões" e, começa assim:

"Qualquer número –e, analogamente, qualquer quantidade – referido a outro número (como diz Nicómaco e também Boécio) ou é igual a este ou é desigual. Se é igual constitui uma razão de igualdade; se é desigual resulta numa razão de desigualdade [e] das razões de desigualdade uma é de maior desigualdade (na relação de uma quantidade maior para outra menor) e outra, porém, de menor. A razão de desigualdade é dúplice porque uma é racional e outra irracional."

Álvaro Tomás aponta, pois, desde o início da sua obra para o problema da comensurabilidade das duas quantidades envolvidas em uma razão e de seguida, fiel a Euclides, reafirma ainda na primeira página:

"***razão** é uma certa relação de dois números, ou de duas quantidades, de uma para a outra*",

esclarecendo também os seus leitores de que:

"Razão é, pois, um termo colectivo, que se usa para duas coisas e designadamente para duas quantidades ou para várias, exprimindo que elas próprias são iguais, ou que uma excede a outra por alguma diferença.

Mais à frente, acrescenta:

*"Razão **racional** é aquela razão que se denomina imediatamente por algum número exacto, ou por um número com uma fracção*, por exemplo a dupla, a sesquiáltera, etc. De outro modo, *razão **racional*** é [*uma razão*] *de duas quantidades que estão entre si de tal modo que uma mesma coisa é parte alíquota*[5] *de uma e outra".*

*"Razão **irracional***, por outro lado*, é a que não é designada imediatamente por algum número.* De outro modo, *razão **irracional*** é [uma razão] *de duas quantidades, que estão entre si de tal modo, que nenhuma parte alíquota de uma é parte alíquota da outra*; por exemplo a razão que existe entre a diagonal e o lado do seu quadrado, porquanto a diagonal excede o lado, mas não algumas vezes, nem por alguma parte alíquota, ou por algumas partes alíquotas, como, mais abaixo, se provará, no capítulo sobre a razão irracional".

Apresentamos a seguir uma sistematização da classificação, feita por A. Tomás, para as razões racionais (de maior desigualdade), com uma tradução simbólica atual e alguns exemplos:

$$\textit{Razões racionais}\begin{cases} \mathbf{1}.\,\textit{Simples}\begin{cases} \mathbf{1.1}\ \textit{Múltipla}\text{: "existe uma razão dupla entre 4 e 2"};\ \boldsymbol{tripla};\ etc. \\ \mathbf{1.2}\ \textit{Superparticular} - \text{"a razão de 6 para 4"} \\ \mathbf{1.3}\ \textit{Supradivisora} - \text{"a razão de 7 para 5"} \end{cases} \\ \\ \mathbf{2}.\,\textit{Compostas}\begin{cases} \mathbf{2.1}\ \textit{Múltipla Superparticular} - \text{"}\textit{a razão de } 9 \textit{ para } 4\text{"} \\ \mathbf{2.2}\ \textit{Múltipla Supradivisora} - \text{"}\textit{a razão de } 11 \textit{ para } 4\text{"} \end{cases} \end{cases}$$

$$(\mathbf{1.1}\ a = 2b, a = 3b, \ldots$$
$$\left(\mathbf{1.2}\ \ a = 1b + \frac{1}{k}b\right)$$
$$\left(\mathbf{1.3}\ a = 1b + \frac{s}{k}b, s < k\right.$$
$$\left(\mathbf{2.1}\ a = mb + \frac{1}{k}b\right.$$
$$\left(\mathbf{2.1}\ a = mb + \frac{s}{k}b, s <\right.$$

No final deste capítulo, Álvaro Tomás conclui:

---

[5] "***Parte alíquota** é a que, tomada algumas vezes, reproduz exactamente o seu todo; por exemplo, a unidade é parte alíquota do número três".*

“E porque uma quantidade maior que tem razão racional com uma menor não pode ser com ela comparada de mais modos do que estes cinco modos, segue-se que não há mais espécies de razão racional”.

4.1.2 “Entre algumas grandezas encontra-se uma razão irracional”

No 2º capítulo, o nosso autor desdobra as cinco “espécies” de razão racional apresentando/definindo com grande detalhe as razões duplas, triplas, etc.. (relativas a 1.1, no quadro anterior) e depois, relativas a 1.2, as sesquiálteras (com $k = 2$), as sesquiterceiras (com $k = 3$), etc. e ainda, relativas a 1.3 as supradivisoras de terceiras parte (com $s = 2$ e $k = 3$) e, como o próprio A. Tomás afirma “*assim até ao infinito”*; desdobrando, analogamente, os casos das razões compostas.

Finalmente, no 3º capítulo, aborda o caso da dita “razão irracional” recorrendo ao exemplo expectável da relação entre a diagonal e o lado de um quadrado. Numa sequência, nem sempre fácil de seguir para os parâmetros de exposição atuais mas que é a todos os títulos um modelo exemplar de, em particular, demonstraçãoes matemáticas, ditas, de *redução ao absurdo,* A. Tomás expõe:

“Suponho em, primeiro lugar, que a razão dos quadrados superficiais é a razão duplicata dos [respetivos] lados”.

Atualmente escreveríamos simbolicamente que

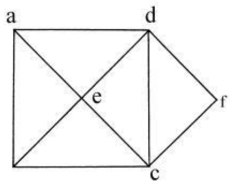
$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$$

para significarmos que a razão entre as áreas de dois quadrados é o quadrado da razão entre os respetivos lados.

Continua o nosso autor,

“2ª Suposição: O quadrado da diagonal está para o quadrdo do lado numa razão dupla”.

Neste caso, o nosso autor, faz uso de uma figura para representar esta afirmação, a saber:



Veremos na secção seguinte deste artigo a potencial confusão gerada por muitos destes termos mas, para já, reportamos que a tradução simbólica desta suposição seria:

$$\frac{d^2}{l^2} = 2$$

“3ª Suposição: Existe uma razão da diagonal para o lado a qual é metade da dupla”.

Isto é, em simbologia atual,

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

“4ª Suposição: Um dos primeiros números de qualquer razão supradivisora é ímpar”.

Isto é, se $\frac{a}{b}$ for uma razão supradivisora então $a = 2n + 1$, com $n \in IN$.

“5ª Suposição: Qualquer quadrado de um número ímpar é ímpar”.

Isto é, $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

"6ª Suposição: Nenhum número ímpar é duplo em relação a um qualquer número".

Isto é,

$$\frac{2n + 1}{b} \neq 2, \forall b \in IN$$

Com estas suposições, A. Tomás conclui, que:

"1ª Conclusão: Nenhuma razão da diagonal em relação ao lado é múltipla, ou múltipla superparticular ou múltipla supradivisora".

"2ª Conclusão: Nenhuma razão da diagonal em relação ao lado é alguma razão superparticular".

"3ª Conclusão: Nenhuma razão da diagonal em relação ao lado é alguma razão supradivisora".

E, finalmente, por exclusão de partes, e estando claro que existe uma razão/relação entre a diagonal e o lado de qualquer quadrado, pode afirmar a sua

"4ª Conclusão: Qualquer razão da diagonal para o lado é irracional".

4.2. ARGUMENTANDO SOBRE A COMPOSIÇÃO DE RAZÕES

O capítulo 5, na parte 2 parece, à primeira leitura, incompreensível. Importa, antes de mais, recordar que esta obra de A. Tomás se insere na tradição dos, denominados, Calculadores de Oxford[6], nos séculos XIII e XIV, que escreviam sobre a Filosofia Natural (Física), estudando o movimento e tendo como ferramenta matemática a teoria das proporções.

Entre estes calculadores, destacou-se aquele que ficou conhecido por Suiseth ou apenas "O Calculador" e cuja identidade é atribuída a Richard Swineshead, embora não unánimemente. É-lhe atribuído o célebre *Liber Calculationum*, que trata do movimento, mas sem uma introdução sobre a teoria das proporções. Era suposto que os leitores interessados começariam por apreender essa teoria num outro livro de um autor anterior, Thomas Bradwardine.

Mas, como diz Pierre Duhem, "um certo Basanus Politus" decidiu também escrever uma introdução ao referido livro de Suiseth a que chamou *Tractatus proportionum introductorius ad calculationes Suisset*, impresso em Veneza, em 1505.

Álvaro Tomás não concordou com a interpretação de Basanus e é contra ela que escreve este capítulo da sua obra.

Para melhor compreensão do texto, vamos ocuparmo-nos de expor sucessivamente a composição de razões no texto euclidiano, as duas tradições interpretativas do tema, e por fim a leitura que nos propusemos.

4.2.1 Composição de razões, em Euclides

Reportemo-nos a algumas das definições, nos libros V e VI, dos *Elementos* de Euclides[7].

---

[6] Também conhecidos por "calculadores do Merton College".

[7] Usamos, neste estudo, uma tradução da nossa autoria da edição inglesa de Thomas Heath.

Def. V, 9: *Quando três grandezas são proporcionais, diz-se que a 1ª tem para a 3ª uma razão duplicata da que tem para a 2ª*.

Exemplo: Razão de 9 para 4

Em esquema, vemos, à esquerda, a razão composta das razões de 9 para 6 e de 6 para para 4 e à direita vemos a interpretação actual[8]

9 6 4 Leia-se $(9:4) :: (9:6) * (6:4)$	$\frac{9}{4} = \frac{9}{6} \times \frac{6}{4}$ ou $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Dizia-se, então, que a razão de 9 para 4 contém o intervalo, ou a razão, de 3 para 2 duas vezes ou ainda que é igual razão de 3 para 2 *duplicata*.

Def. V, 10: *Quando quatro grandezas são [continuamente] proporcionais, diz-se que a primeira tem para a quarta uma razão triplicata da que tem para a segunda e assim sucessivamente*.

Exemplo: Usando o mesmo esquema, veja-se o caso da razão de $(8:1)$ composta das razões de $(8:4)$, $(4:2)$ e $(2:1)$

8 4 2 1 leia-se $(8:1) :: (8:4) * (4:2) * (2:1)$	$\frac{8}{1} = \frac{8}{4} \times \frac{4}{2} \times \frac{2}{1}$ ou $\frac{8}{1} = \left(\frac{2}{1}\right)^3$

Dizia-se, neste caso, que a razão de 8 para 1 contém o intervalo, ou a razão, de 2 para 1 três vezes ou ainda que é igual razão de 2 para 1 *triplicata*.

Releve-se que nos casos destas definições (Def. V, 9 e V, 10) as razões componentes são iguais e Euclides é cuidadoso no uso das palavras *duplicata* e *triplicata* (enquanto produtos) mas outros geómetras gregos usaram "dupla" em vez de *duplicata*, "tripla" em vez de *triplicata*, etc.. E, portanto, passou a usar-se "duplo" e "triplo" com dois significados distintos: um no sentido usual de adição e outro num sentido de multiplicação (como em Euclides, se subentende).

[8] Usamos o símbolo ":" para razão, o símbolo "::" para proporção e o asterisco para composição.

A definição de razão composta não existe no livro V, mas é referida nas proposições VI, 23 e VIII, 5; contudo, há uma definição da razão composta considerada interpolação, talvez pré teonina, que aparece no livro VI e é a seguinte

> Def. VI, 5: *Uma razão diz-se composta de razões quando as suas quantidades multiplicadas fazem alguma (razão?).*

Importa também reportar que não há operações aritméticas aplicadas às razões em qualquer dos livros dos *Elementos* e, por outro lado, que a simbología aritmética surge muito mais tarde pelo que o entendimento dos conceitos dependia somente das palavras (terminologia) usadas. Daí, ter havido uma certa liberdade em entender a composição em termos aditivos e/ou multiplicativos.

4.2.2 Duas tradições interpretativas da composição

Segundo Edith Sylla, há duas tradições ligadas à composição.

<u>1ª tradição</u> – termos aditivos

Esta 1ª tradição, na opinião de Bernard Vitrac[9], estaria ligada à Música e aos intervalos musicais.

Exemplo: o intervalo musical da oitava, composto pelos intervalos da quarta e da quinta exprime-se numericamente dizendo que a dupla (4: 2, oitava na música) é composta de (4:3, quinta na música) e de (3:2, quarta na música).

$$4 \quad 3 \quad 2$$

$$(4{:}\,2) :: (4{:}\,3) * (3{:}\,2)$$

Na Idade Média esta tradição aditiva é usada pelos Calculadores de Oxford, por Nicole Oresme da Escola de Paris e A. Tomás, e muitos outros também a usaram. Já no Renascimento a tradição manteve-se, nomeadamente em Pedro Nunes (no seu *Libro de Algebra,* em 1567), Clavio, Wallis, Barrow e até Newton na 1ª edição dos *Principia*, em 1687, a usou.

<u>2ª tradição</u> – termos multiplicativos

Esta tradição é baseada na anteriormente referida Def. VI, 5 e introduz o conceito de quantidade de razão e a operação de multiplicação como método de composição de razões.

A quantidade, em termos modernos, era o número que exprime a razão, nos mais baixos termos, no caso de razões racionais. Esta quantidade era também chamada denominação e ainda denominador ou expoente da razão. Compor era, neste caso, multiplicar as quantidades de razões, ou denominações, como já dito.

Numa certa altura, começaram a aparecer autores que identificam as razões com as denominações.

Leibniz, por exemplo, representa esta segunda tradição e como afirma Edith Sylla, desde o início do séc. XVIII, os matemáticos começam seguir a segunda tradição, com raras excepções.

---

[9] Boécio, usou os verbos *componere* (compor) ou *conjungere* (juntar) para a composição, ligado ao sinal de adição na sua *De Institutione Arithmetica*, mas usou o verbo *adere* (adicionar) na sua *De Institutione Musicale*. Oresme considera a composição como adição e usou o mesmo verbo *adere*.

Hoje, as razões, para nós, são identificadas com os números que as representam (denominações medievais e até do Renascimento) mas, para chegar aqui, o caminho foi longo e assitiu-se mesmo a discussões[10], entre os matemáticos, sobre qual a tradição mais correcta.

4.2.3 Capítulo 5 da Parte II do *Liber*

Feita esta introdução debrucemo-nos na leitura proposta. A pretensão de Basanus Politus era que a composição de razões se fazia a partir da multiplicação das respectivas denominações (tal como fazemos hoje em dia) mas Álvaro Tomás vai opôr-se (em termos de pró e contra) a esta posição mostrando que as ideias de Basanus conduzem a contradições e que estão em contradição com a Autoridade (Euclides e Suiseth). Vejamos apenas um dos exemplos.

Diz Basanus: "A quádrupla $(4:1)$ é dupla em relação à dupla $(2:1)$ porque é dupla a razão das suas denominações $(4:2 = 2)$".

Álvaro Tomás refuta, logicamente, apresentando três argumentos contra.

1ºargumento: "Esta opinião é contra os princípios matemáticos, porque, se fosse verdadeira, então a óctupla seria dupla em relação à quádrupla".

Fazendo uso de um silogismo, dito *modus tollens*[11], baseado em $(a \to b)$ sse $(\neg b \to \neg a)$, Álvaro Tomás conclui que, como o consequente é falso ("a óctupla ser dupla em relação à quádrupla"), logo também é falso aquilo de que procede ("a quádrupla ser dupla em relação à dupla"). Prova a falsidade do consequente, dizendo que se a óctupla é dupla em relação à quádrupla, então a **quádrupla seria metade da óctupla (i)** e a óctupla conteria a quádrupla exactamente duas vezes.

Mas, isto é falso, diz A. Tomás, pois é a sexdécupla que contém a quádrupla exactamente duas vezes, como se vê:

$$(16:1) :: (16:4) * (4:1)$$

2º argumento: Ainda, de outra forma, diz A. Tomás, se pode confirmar a falsidade de a óctupla conter a quádrupla exactamente duas vezes. Se fosse verdade, então seguir-se-ia que a óctupla, ao perder uma quádrupla. ficaria ainda quádrupla, mas fica apenas dupla, como é evidente de

$$(8:1) :: (8:4) * (4:1)$$

Logo a **dupla é metade da óctupla (ii).**

3º argumento: Mas, não é verdade que a dupla seja metade da óctupla (ii), pois segundo Basanus, a quádrupla é a metade da óctupla, como se viu em (i). Daqui, segui-se-ia que a dupla seria igual à quádrupla, o que é contraditório.

Como o consequente é falso; logo portanto, contra o opinante, aquilo de que procede.

---

[10] Isaac Barrow referiu-se a tais discussões como sendo "logomaquias" (do grego: *logos+mach*), isto é, combates de palabras.

[11] O *modus tollens* traduz-se assim: Se $(a \to b)$ e $(\neg b)$, então $(\neg a)$.

Continua A. Tomás:

Se a dupla é igual à quádrupla, então a metade de alguma coisa é igual à quarta parte dessa coisa. Ora isto é falso – e portanto também aquilo de que procede.

E então teríamos que a dupla seria, por um lado metade da óctupla e, por outro, a quarta parte da óctupla. É evidente que a óctupla não contém a quádrupla duas vezes e por isso não pode ser dupla em relação a ela.

Álvaro Tomás argumenta ainda que, segundo os principios matemáticos, se tem:

$(16{:}\,1) :: (4{:}\,1) * (4{:}\,1)$, então $(16{:}\,1)$ é dupla em relação à quádrupla; da mesma forma, como

$(8{:}\,1) :: (2{:}\,1) * (2{:}\,1) * (2{:}\,1)$, a razão $(8{:}\,1)$ é tripla em relação à dupla.

Para Basanus seria:

$(16{:}\,1)$ quádrupla em relação à quádrupla porque$4 \times 4 = 16$; $(8{:}\,1)$ quádrupla em relação à dupla porque $4 \times 2 = 8$.

Depois de mostrar que a opinião de Basanus leva a contradições, vai agora mostrar que é contra a Autoridade sobre o assunto; neste caso invoca Euclides e Suiseth. Diz então Álvaro Tomás:

Mas isto é falso, pelas Def. V, 9 e V,10 dos *Elementos* de Euclides (que ele interpretava aditivamente). Diz ainda que está também contra as conclusões de Suiseth, que discorda de Basanus em muitos pontos da sua obra.

E dá exemplos, um dos quais é precisamente o da sexdécupla, que o Calculador afirma que é dupla em relação à quádrupla, isto é

$(16{:}\,1) :: (4{:}\,1) * (4{:}\,1)$ como A. Tomás afirmara e contra o que Basanus afirma.

Daí, conclui que ele não compreendeu o pensamento do Calculador, nem o seu tratado o facilita, mas o dificulta.

E assim ele prova, que a razão de razões não é o mesmo que a razão de denominações, como pretendia Basanus.

5. CONCLUSÃO

O interesse destes dois capítulos que selecionámos reside, para nós, no facto de termos podido revisitar um tema tão importante como é o das razões (das proporções e das suas operações aritméticas) à luz de um matemático português que escreveu há mais de 500 anos mas cujo texto ainda não está acessível. Fizemos este estudo com a convicção de que, deste modo, podemos compreender melhor a evolução deste tópico matemático que chegou até aos nossos dias com um cariz elementar. Reconhecemos, através de leituras como as que acabámos de apresentar, que muitos destes conceitos são, hoje em dia, porventura precocemente ensinados já que os registos históricos como os que A. Tomás nos deixou são tão polémicos, tão confusos e foram, apesar da sua importância –por exemplo em temas como o do estudo do movimento– seguramente, tão difíceis de ensinar e de aprender. Assim, com a ajuda preciosa do nosso tradutor, Carlos Vilar, pudemos reler este texto difícil, que tem uma terminologia algo arcaica mas tão descritiva e que ilustra bem o modo como a linguagem matemática se foi alterando ao longo do tempo, mudando até o significado dos termos; deparámo-nos, pela mão de A. Tomás, com um rigor lógico algo prolixo mas que devemos entender à luz da função pedagógica que esta obra também terá tido.

Contudo, quando nos propomos interpretar os dois episódios que escolhemos para o presente artigo, recebemos, ainda hoje, lições valiosas ao nível de resoluções alternativas (no caso do 3º capítulo, da 1ª parte) para o problema da incomensurabilidade entre a diagonal e lado de um quadrado ou (no cado do 5º capítulo, da 2ª parte) ao nível do reconhecimento de que cada um dos autores tinha concepções diferentes em relação à composição das razões. Álvaro Tomás usa a tradição aditiva e Basanus usa a tradição multiplicativa, operando directamente sobre os valores numéricos das razões.

Reconhecemos, pelo que fomos descrevendo ao longo deste nosso relato, o quão difícil é, muitas vezes, ler um texto antigo; este exige-nos sempre uma abordagem rigorosa, profunda e dentro do contexto em que foi escrito, se não queremos ser conduzidos a conclusões erróneas.

Referências bibliográficas

Boèce, *Instituition Arithmétique*, Les Belles Lettres, Paris (1995).

Drake, S., "Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind", em *Cahiers d' histoire et de Philosophie des Sciences*. nº 21 (1987), pp. 52–64.

Duhem, P., *Études sur Léonard de Vinci*, Paris, 1906-13, vol. 3, 531-543.

Guessner, S., "Para a história das séries infinitas na Idade Média Cristã", em *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Nº 62, (Maio 2010), pp. 67-87.

Heath, T. *Euclid -The Thirteen Books of the Elements*, Dover Publication Inc., New York, 1956.

Leitão. H., "Notes on the life and work of Álvaro Tomás", em *Bulletin do CIM*, nº9, (Dezembro de 2000), pp. 10-15.

Rey Pastor, J., *Los matemáticos españoles del siglo XVI* (discurso inaugural del año académico 1912/1913 en la Universidad de Oviedo), Madrid, 1926.

Sá, C., "Matemática na Grécia Antiga", em Maria Fernanda Estrada & al., *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, (2000). pp. 119-367.

Sá, C., "A soma de séries na obra De triplici Motu de Álvaro Tomás", em *I Colóquio Brasileiro de História da Matemática, IV Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Anais,(John A. Fossa ed.), Natal, RN* (2005), pp. 59-80.

Sylla, E., "Compounding ratios",in *Transformation and Tradition in the Science,* ed. Everett Mendelsohn, Cambridge University Press, (1984), pp. 12-43.

Sylla, E., "Mathematics in the *Liber de Triplici Motu* (1509) of Alvarus Thomas of Lisbon". Em *The Practice of Mathematics in Portugal*, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, (2004), pp. 109-161.

Tomás, A., *Liber de Triplici Motu…*, Paris, 1509.

Vitrac, B.,(1994) Euclide*: Les Élements.* Vol.2: Livres V à IX, Paris: PUF.